Auszug aus dem Kerncurriculum Mathematik der Gymnasialen Oberstufe (Niedersachsen)

Herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium (2018)
30159 Hannover, Schiffgraben 12

3.3.2 Lernbereiche für die Qualifikationsphase
3.3.2.1 Lernbereiche für Gymnasium, Gesamtschule, Abendgymnasium und Kolleg

Lernbereiche gA

Lernbereich: Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen	**gA**
Intentionen Zu vorgegebenen Eigenschaften in Sachkontexten sowie Eigenschaften des Graphen einer Funktion werden Bedingungen für den Term einer Funktion formuliert. Dabei wird ein geeigneter Grad einer ganzrationalen Funktion ausgewählt und ihr Term ermittelt. Die Fragestellungen zur Kurvenanpassung führen häufig auf lineare Gleichungssysteme. Die Behandlung eines algorithmisierbaren Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme bietet die Möglichkeit der Vernetzung mit dem Lernbereich „Raumanschauung und Koordinatisierung“.	
Kern ▪ zu vorgegebenen Eigenschaften in Sachkontexten Bedingungen für den Term einer Funktion formulieren ▪ vorgegebene lokale und globale Eigenschaften des Graphen einer Funktion in Bedingungen an deren Funktionsterm übersetzen ▪ ein algorithmisierbares Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und anwenden ▪ Funktionsterme anhand von Bedingungen ermitteln ▪ Variation eines Parameters zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft durchführen	
Fakultative Erweiterungen: Vergleich mit durch Regression gewonnenen Funktionen	
Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang	
Online-Material: Kurvenanpassung mit ganzrationalen Funktionen (gA)	

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung	gA

Intentionen

Bei der Behandlung von Sachproblemen aus Kontexten wie Zu- und Ablauf sowie Geschwindigkeit und Weg werden eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt und die Erfahrungen mit Grenzprozessen erweitert.
Das Integral wird als aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhalt interpretiert werden.

Der Bezug zur Differentialrechnung wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ mit $F' = f$ formuliert.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe des eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugs auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Stammfunktionen werden mithilfe der bekannten Ableitungsregeln überprüft und in einfachen Fällen entwickelt.

Die gewonnenen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern die Möglichkeiten, Sachprobleme zu lösen. Dabei ermöglicht das digitale Mathematikwerkzeug auch die Betrachtung komplexerer Funktionen.

Kern

- Bestimmtes Integral
  - Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruieren
  - das Integral als Grenzwert von Produktsummen beschreiben
  - den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich begründen
  - bestimmte Integrale berechnen
  - bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand
  - Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen
- Stammfunktion
  - Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln überprüfen
  - Stammfunktionen zu Funktionen f mit $f(x) = x^n;\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ angeben
  - Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion sowie mit Summen- und Faktorregel entwickeln

Fakultative Erweiterungen:

Integralfunktion

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung (gA)

Lernbereich: Die e-Funktion	gA

Intentionen

Ausgehend von bekannten Beispielen zu exponentiellen Wachstumsprozessen werden die Exponentialfunktionen wieder aufgegriffen. Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen mithilfe der Wachstumsgeschwindigkeit wird die Ableitung von Exponentialfunktionen thematisiert.

Die Exponentialfunktion zur Basis e wird durch die Eigenschaft beschrieben, dass sie mit ihrer Ableitungsfunktion identisch ist. Exponentialterme mit beliebigen Basen werden in Terme zur Basis e umgeformt sowie abgleitet.

Die Verkettung mit linearen Funktionen wird definiert und die Kettenregel bei linearer innerer Funktion als neue Ableitungsregel eingeführt. Zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen zur Basis e wird der ln als Umkehroperation verwendet.

Die additive und multiplikative Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen wird eingeführt und an ausgewählten Beispielen untersucht. Die zur Ableitung notwendige Produktregel wird eingeführt.

Zur Angleichung an Daten werden Parameter durch Einsetzen konkreter Werte bestimmt.

Das asymptotische Verhalten wird als eine besondere Eigenschaft beschrieben und am Beispiel des begrenzten Wachstums thematisiert.

Bei der Bearbeitung von Problemen mit verknüpften Funktionen und mit linear verketteten Funktionen müssen auch angemessene Verfahren zum Lösen entsprechender Gleichungen thematisiert werden.

Kern

- die Wachstumsgeschwindigkeit bei exponentiellem Wachstum als proportional zum Bestand beschreiben
- die Basis e durch $(e^x)' = e^x$ charakterisieren
- die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x) = a^x$ verwenden
- in einfachen Fällen additive und multiplikative Verknüpfungen mit ganzrationalen Funktionen beschreiben, untersuchen und in Sachproblemen anwenden
- Verkettung mit linearen Funktionen beschreiben, untersuchen und in Sachproblemen anwenden
- Produktregel und Kettenregel bei linearer innerer Funktion anwenden
- Parameterbestimmungen zur Angleichung an Daten durchführen
- Exponentialgleichungen lösen
- asymptotisches Verhalten des begrenzten Wachstums beschreiben

Fakultative Erweiterungen:

ln als Funktion

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Die e-Funktion (gA)

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung	gA

Intentionen

Ausgehend von Fragen der Orientierung im Raum werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erkannt. Dabei wird an die Erfahrungen aus dem Sekundarbereich I angeknüpft. Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Nutzung von Realmodellen und Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess.

Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen eine Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte in der Ebene und insbesondere im Raum. Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Berechnungen.

Kern

- Raumanschauung und Koordinatisierung
  - Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben
  - die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen
  - Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen
  - Kollinearität zweier Vektoren überprüfen
  - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden
- Maße und Lagen
  - Abstände zwischen Punkten bestimmen
  - Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden
  - Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen
  - Winkelgrößen zwischen Strecken und Geraden bestimmen
  - Lagebeziehungen von Geraden untersuchen und Schnittpunkte bestimmen

Fakultative Erweiterungen:

Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen; Ebenengleichungen in Normalenform; Kreis- und Kugelgleichung

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Messen; Raum und Form

Online-Material:

Raumanschauung und Koordinatisierung (gA); Alternativer Zugang zur Raumanschauung und Koordinatisierung (gA und eA)

Lernbereich: Daten und Zufall	gA

Intentionen

Ausgehend von Erfahrungen mit Zufallsexperimenten werden die Kenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert.

Beim Umgang mit den Einträgen in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt. Hierbei wird insbesondere zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterschieden. Der Vergleich zwischen dem Ziehen ohne Zurücklegen und dem Ziehen mit Zurücklegen fördert das Verständnis für die stochastische Unabhängigkeit.

Häufigkeitsverteilungen vorliegender Daten lassen sich durch diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen modellieren, um – durch Simulation oder durch Rechnung – Prognosen zu gewinnen. Dabei wird die zugehörige Zufallsgröße angegeben. Die bekannten Kenngrößen für empirisch gewonnene Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf das jeweilige theoretische Modell der Wahrscheinlichkeitsverteilung übertragen und führen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung.

Exemplarisch für Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Binomialverteilungen und deren grafische Darstellungen erkundet. Mithilfe von Simulationen werden stochastische Situationen betrachtet, die näherungsweise auf die Binomialverteilung führen.

Mithilfe der Binomialverteilung lassen sich (auch durch Simulation) Prognoseintervalle über Stichproben gewinnen, die bei vorliegender Grundgesamtheit zu erwarten sind. Umgekehrt lässt sich durch Rechnersimulationen ermitteln, ob ein vermuteter Anteil der Grundgesamtheit bzw. eine vermutete Wahrscheinlichkeit mit einer vorliegenden Stichprobe verträglich ist.

Kern

- Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit
  - Einträge in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln nutzen, um den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu erarbeiten und dabei zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterscheiden
  - Teilvorgänge bei mehrstufigen Zufallsexperimenten auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen
  - Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung herstellen
  - Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen und interpretieren
  - Faire Spiele mithilfe des Erwartungswerts kennzeichnen
- Binomialverteilung
  - Eignung des Modells beurteilen
  - Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Binomialverteilungen erläutern
  - Zufallsgröße sowie Parameter n und p der Binomialverteilung im Sachkontext angeben
  - die Bedeutung der Faktoren im Term $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ erläutern
  - Wahrscheinlichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen
  - die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
  - die grafischen Darstellungen von Binomialverteilungen im Hinblick auf Parameter und Kenngrößen deuten
  - Prognoseintervalle grafisch oder tabellarisch ermitteln und interpretieren
  - beurteilen, ob ein vorgegebener Anteil der Grundgesamtheit bzw. ein vorgegebener Wert des Parameters p mit einer gegebenen Stichprobe verträglich ist
  - Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden

Fakultative Erweiterungen: ---

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Messen; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall

Online-Material:

Daten und Zufall (gA)