

Lernbereiche eA

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung	eA
<p>Intentionen</p> <p>Bei der Behandlung von Sachproblemen aus Kontexten wie Zu- und Ablauf sowie Geschwindigkeit und Weg werden eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt und die Erfahrungen mit Grenzprozessen erweitert.</p> <p>Das Integral wird als aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhalt interpretiert werden.</p> <p>Die funktionale Beschreibung von Integralen führt zur Integralfunktion, die als Bestandsfunktion und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhaltsfunktion interpretiert werden kann. Der Bezug zur Differentialrechnung wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert.</p> <p>Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzzahliger Funktionen entwickelt und mithilfe des eingeführten digitalen Mathematikwerkzeugs auf weitere Funktionen ausgedehnt.</p> <p>Stammfunktionen werden mithilfe der bekannten Ableitungsregeln überprüft und in einfachen Fällen entwickelt.</p> <p>Die gewonnenen Kenntnisse und Fähigkeiten erweitern die Möglichkeiten, Sachprobleme zu lösen. Dabei ermöglicht das digitale Mathematikwerkzeug auch die Betrachtung komplexerer Funktionen.</p> <p>Das Verständnis des Integralbegriffs wird durch die Herleitung der Volumenformel eines Rotationskörpers und die Bestimmung uneigentlicher Integrale erweitert.</p>	
<p>Kern</p> <ul style="list-style-type: none"> • Bestimmtes Integral <ul style="list-style-type: none"> ▪ Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruieren ▪ das Integral als Grenzwert von Produktsummen beschreiben ▪ den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich begründen ▪ bestimmte Integrale berechnen ▪ bestimmte Integrale auch im Sachzusammenhang deuten, insbesondere als (re-)konstruierter Bestand ▪ Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen • Integral- und Stammfunktion <ul style="list-style-type: none"> ▪ Integralfunktionen auch als Bestands- oder Flächeninhaltsfunktion interpretieren ▪ Integral- und Stammfunktion unterscheiden ▪ Stammfunktionen zu Funktionen f mit $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0\}$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ angeben ▪ die ln-Funktion als eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$; $x > 0$ verwenden ▪ Stammfunktionen mit der Kettenregel bei linearer innerer Funktion, sowie mit Summen- und Faktorregel entwickeln ▪ Stammfunktionen mithilfe der Ableitungsregeln überprüfen • Vertiefungen <ul style="list-style-type: none"> ▪ Volumenformel für Körper, die durch Rotation eines Graphen um die x-Achse entstehen, herleiten und anwenden ▪ uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten interpretieren und bestimmen 	
<p>Fakultative Erweiterungen: Mantelflächen; Bogenlänge; Rotation um die y-Achse; Mittelwerte; Schwerpunkte</p>	
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Messen; Funktionaler Zusammenhang</p>	
<p>Online-Material: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung (eA)</p>	

Lernbereich: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion	eA
<p>Intentionen</p> <p>Ausgehend von Beispielen zu exponentiellen und begrenzten Zu- und Abnahmeprozessen werden die bereits bekannten Wachstumsmodelle um das des logistischen Wachstums ergänzt. Die verschiedenen Wachstumsmodelle werden verglichen und im Sachzusammenhang interpretiert. Zur Angleichung an Daten werden Parameter durch Einsetzen konkreter Werte bestimmt.</p> <p>Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen mithilfe der Wachstumsgeschwindigkeit wird die Ableitung von Exponentialfunktionen thematisiert.</p> <p>Die Exponentialfunktion zur Basis e wird durch die Eigenschaft beschrieben, dass sie mit ihrer Ableitungsfunktion identisch ist, was auch durch die Differentialgleichung $f' = f$ beschrieben wird. Die Verkettung mit ganzrationalen Funktionen wird definiert und die Kettenregel als neue Ableitungsregel eingeführt. Die Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen wird eingeführt und, ebenso wie die Verkettung, an ausgewählten Beispielen hinsichtlich charakteristischer Merkmale untersucht und so zur Lösung inner- und außermathematischer Probleme genutzt. Dabei wird auch die Produktregel eingeführt.</p> <p>Zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen zur Basis e wird der ln als Umkehroperation verwendet und die ln-Funktion wird als Stammfunktion für f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ angegeben.</p> <p>Bei der Bearbeitung von Problemen mit verketteten und mit verknüpften Funktionen müssen auch Verfahren zum Lösen entsprechender Gleichungen und Gleichungssysteme thematisiert werden.</p> <p>Das asymptotische Verhalten der Graphen von Exponentialfunktionen wird als eine besondere Eigenschaft beschrieben. Dabei werden die Vorstellungen von Grenzprozessen vertieft.</p> <p>Bei der exponentiellen, begrenzten und logistischen Modellierung von Wachstumsvorgängen werden die Zusammenhänge zwischen Änderungsrate und Bestand durch Differentialgleichungen beschrieben, die auch zur Klassifizierung nach Wachstumsarten verwendet werden können. Funktionen werden durch Einsetzen in die Differentialgleichung auf ihre Eignung als Lösungsfunktion überprüft.</p>	
<p>Kern</p> <ul style="list-style-type: none"> • Untersuchung von Wachstumsprozessen <ul style="list-style-type: none"> ▪ begrenztes und logistisches Wachstum beschreiben, auch als Verkettung und Verknüpfung von Funktionen ▪ verschiedene Wachstumsmodelle vergleichen ▪ asymptotisches Verhalten im Sachzusammenhang beschreiben ▪ Modelle mithilfe zugehöriger Differentialgleichungen beschreiben und mögliche Lösungsfunktionen überprüfen • e-Funktion <ul style="list-style-type: none"> ▪ die Basis e durch $(e^x)' = e^x$ charakterisieren ▪ die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ und der Exponentialfunktionen g mit $g(x) = a^x$ verwenden ▪ Verkettung und Verknüpfung mit ganzrationalen Funktionen auch zur Modellierung in Sachsituationen beschreiben und untersuchen ▪ asymptotisches Verhalten bei additiver Verknüpfung linearer Funktionen mit e-Funktionen beschreiben ▪ Exponentialgleichungen lösen ▪ Produkt- und Kettenregel anwenden ▪ Scharparameter, auch zur Angleichung an Daten, ermitteln ▪ Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen durch Einsetzen überprüfen 	
<p>Fakultative Erweiterungen:</p> <p>Quotientenregel</p>	

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang

Online-Material:

Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion (eA)

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung	eA
<p>Intentionen</p> <p>Ausgehend von Fragen der Orientierung im Raum werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems erkannt. Dabei wird an die Erfahrungen aus dem Sekundarbereich I angeknüpft. Die Auseinandersetzung mit zeichnerischen Darstellungen von Körpern fördert in besonderem Maße das geometrische Vorstellungsvermögen. Die Nutzung von Realmodellen und Geometriesoftware unterstützt diesen Prozess.</p> <p>Die Koordinatisierung und die Methoden der Analytischen Geometrie ermöglichen eine Beschreibung und Untersuchung geometrischer Objekte in der Ebene und insbesondere im Raum.</p> <p>Die Projektion vom Raum in die Ebene wird mit Matrizen beschrieben.</p> <p>Unterschiedliche Darstellungsformen von Geraden- und Ebenengleichungen ermöglichen eine flexible Untersuchung von Lagebeziehungen. Deshalb ist unter Umständen der Wechsel zwischen Darstellungsformen notwendig.</p> <p>Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Berechnungen.</p>	
<p>Kern</p> <ul style="list-style-type: none"> • Raumanschauung und Koordinatisierung <ul style="list-style-type: none"> ▪ Punkte und Vektoren in Ebene und Raum durch Tupel beschreiben ▪ die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung von Punkten, Strecken, ebenen Flächen und einfachen Körpern nutzen ▪ Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren anwenden und geometrisch veranschaulichen ▪ Kollinearität zweier Vektoren überprüfen ▪ die Projektion vom Raum in die Ebene mit Matrizen etwa der Form $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben und Punktkoordinaten für Schrägbilder berechnen • Darstellungsformen <ul style="list-style-type: none"> ▪ Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform verwenden ▪ Ebenengleichungen in Normalen- und Koordinatenform verwenden ▪ zwischen den Darstellungsformen wechseln • Maße und Lagen <ul style="list-style-type: none"> ▪ Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen ▪ Skalarprodukt geometrisch als Ergebnis einer Projektion deuten und verwenden ▪ Orthogonalität zweier Vektoren überprüfen ▪ Winkelgrößen bestimmen ▪ Lagebeziehungen von Geraden, Geraden und Ebenen sowie von Ebenen untersuchen und Schnittprobleme lösen ▪ den Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme erläutern und in geeigneten Fällen anwenden 	
<p>Fakultative Erweiterungen: Vektoren in nichtgeometrischen Kontexten; weitere Abbildungsmatrizen; Kreis- und Kugelgleichung</p>	
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Messen; Raum und Form</p>	
<p>Online-Material: Raumanschauung und Koordinatisierung (eA); Alternativer Zugang zur Raumanschauung und Koordinatisierung (gA und eA)</p>	

Lernbereich: Kurvenanpassung und Funktionsscharen	eA
<p>Intentionen</p> <p>Zu vorgegebenen Datenpunkten und/oder vorgegebenen Eigenschaften in Sachkontexten werden Bedingungen an eine Modellfunktion formuliert. Passend zu diesen Bedingungen werden ein geeigneter Funktionstyp ausgewählt und Funktionsgleichungen bestimmt. Umgekehrt werden anhand gegebener Funktionsterme neuer Vertreter bekannter Funktionstypen die bekannten Eigenschaften zur Beschreibung verwendet.</p> <p>Durch Regression gewonnene Funktionen werden zum Vergleich herangezogen.</p> <p>Bei Modellierungen mit abschnittsweise definierten Funktionen sind darüber hinaus an den Übergängen Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit als Bedingungen zu nutzen und im Sachkontext zu interpretieren. Die Zugänge zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden anschauungsgeleitet gefunden.</p> <p>Von einem Parameter abhängige ganzrationale Funktionen oder Funktionen, die durch Verknüpfung und Verkettung von ganzrationalen mit e-Funktionen entstehen, werden jeweils zu einer Funktionenschar zusammengefasst. Die Funktionen solcher Scharen werden hinsichtlich ihrer Gemeinsamkeiten und Unterschiede klassifiziert.</p> <p>Fragestellungen in diesem Lernbereich führen häufig auf lineare Gleichungssysteme. Dies bietet die Möglichkeit der Vernetzung mit dem Lernbereich „Raumanschauung und Koordinatisierung“.</p>	
<p>Kern</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kurvenanpassung <ul style="list-style-type: none"> ▪ Funktionen nach globalen Eigenschaften wie Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \infty$, asymptotisches Verhalten bzw. Periodizität klassifizieren ▪ bei der Anpassung an Daten neben globalen Eigenschaften weitere charakteristische Merkmale von Funktionen zur Ermittlung eines geeigneten Funktionsterms nutzen ▪ vorgegebene lokale Eigenschaften des Graphen einer Funktion in Bedingungen an deren Funktionsterm übersetzen und diesen ermitteln ▪ Stetigkeit und Differenzierbarkeit zur Synthese und Analyse abschnittsweise definierter Funktionen nutzen • Funktionenscharen <ul style="list-style-type: none"> ▪ Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Scharen ganzrationaler Funktionen und bei Scharen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, in Abhängigkeit vom Scharparameter benennen und begründen ▪ Variationen des Scharparameters zur Anpassung an vorgegebene Eigenschaften durchführen 	
<p>Fakultative Erweiterungen: Splines, Bestimmung von Ortskurven</p>	
<p>Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche: Algorithmus und Zahl; Funktionaler Zusammenhang</p>	
<p>Online-Material: Kurvenanpassung und Funktionsscharen (eA)</p>	

Intentionen

Ausgehend von Erfahrungen mit Zufallsexperimenten werden die Kenntnisse zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erweitert.

Beim Umgang mit den Einträgen in Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt. Hierbei wird insbesondere zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterschieden. Der Vergleich zwischen dem Ziehen ohne Zurücklegen und dem Ziehen mit Zurücklegen fördert das Verständnis für die stochastische Unabhängigkeit.

Häufigkeitsverteilungen vorliegender Daten lassen sich durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen modellieren, etwa um – durch Simulation und durch Rechnung – Prognosen zu gewinnen. Dabei wird die zugehörige Zufallsgröße angegeben. Die bekannten Kenngrößen für empirisch gewonnene Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf das jeweilige theoretische Modell der Wahrscheinlichkeitsverteilung übertragen und führen zum Erwartungswert und zur Standardabweichung.

Es werden diskrete von stetigen Zufallsgrößen abgegrenzt.

Exemplarisch für Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden die Binomial- und Normalverteilung und deren grafische Darstellungen für verschiedene Parameter erkundet. Die Normalverteilung wird als ein Beispiel für eine stetige Verteilung und in geeigneten Fällen als Approximation der Binomialverteilung verwendet. Mithilfe von Simulationen werden stochastische Situationen betrachtet, die näherungsweise auf die Binomial- bzw. die Normalverteilung führen.

Prognose- und Konfidenzintervalle lassen sich durch Variation der Parameter ermitteln und mithilfe der Normalverteilung auch berechnen. Sie stellen Näherungen für die entsprechenden Intervalle der Binomialverteilung dar. Simulationen fördern das Verständnis hinsichtlich Unsicherheit und Genauigkeit der Konfidenzintervalle.

Kern

- Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit
 - Einträge in Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln nutzen, um den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu erarbeiten und dabei zwischen bedingendem und bedingtem Ereignis unterscheiden
 - Zusammenhang zwischen Unabhängigkeit und bedingten Wahrscheinlichkeiten herstellen
 - Kausale und stochastische Unabhängigkeit voneinander abgrenzen
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen
 - Zusammenhang zwischen Kenngrößen der Häufigkeitsverteilung und Kenngrößen der Wahrscheinlichkeitsverteilung herstellen
 - Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung berechnen und interpretieren
 - faire Spiele mithilfe des Erwartungswerts kennzeichnen
- Binomialverteilung
 - Eignung des Modells beurteilen
 - Beziehung zwischen Häufigkeitsverteilungen und Binomialverteilungen erläutern
 - Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden
 - Zufallsgröße sowie Parameter n und p der Binomialverteilung im Sachkontext angeben
 - die Bedeutung der Faktoren im Term $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ erläutern
 - Wahrscheinlichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen berechnen
 - die Kenngrößen Erwartungswert und Standardabweichung berechnen
 - die grafischen Darstellungen von Binomialverteilungen im Hinblick auf Parameter und Kenngrößen deuten
 - Prognoseintervalle grafisch oder tabellarisch ermitteln und interpretieren
 - beurteilen, ob ein vorgegebener Anteil der Grundgesamtheit bzw. ein vorgegebener Wert des Parameters p mit einer gegebenen Stichprobe verträglich ist
 - die Binomialverteilung als näherungsweise Modell für weitere stochastische Situationen verwenden
- Normalverteilung
 - Diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden

- Notwendigkeit von Histogrammen erläutern
- Parameter der Normalverteilung erläutern und in Sachkontexten nutzen
- Binomial- und Normalverteilung
 - Angemessenheit der Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung beurteilen
 - Prognoseintervalle auch mithilfe von σ -Umgebungen für Anteile berechnen und interpretieren
 - Konfidenzintervalle für den Parameter p der Binomialverteilung ermitteln und interpretieren
 - die Intervallgrenzen von Konfidenzintervallen als zufällige Größen erläutern
 - die Sicherheitswahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit deuten, mit der die Konfidenzintervalle bei Verwendung der Normalverteilung den wahren Wert überdecken
 - exemplarisch stochastische Situationen simulieren, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen, um Näherungslösungen in komplexeren Situationen zu erhalten

Fakultative Erweiterungen:

andere Verteilungen

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche:

Messen; funktionaler Zusammenhang; Daten und Zufall

Online-Material:

Daten und Zufall (eA)